Diala , Jour , Volume , 32 , 2009

استخدام المحاكاة لإيجاد أفضل مقدر لمعلمة ومعولية التوزيع الاسي

م. د. أسـيل سـمير محمـد

فـرع طب المجتمـع

كليــة طب الكنــدي

الملخص :

يعتبر التوزيع الأسي من أكثر توزيعات الفشل استخداماً وهو يلعب دوراً مهماً في تجارب الحياة. يتم في هذا البحث عرض التوزيع الأسي ذو معلمة واحدة أو أكثر مع خصائصه ثم شرح ثلاث من طرق تقدير معلمة ومعولية هذا التوزيع وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز، وطريقة مقترحة تمثل خليط بين طريقتين، ستتم المقارنة بين تلك الطرائق بواسطة MSE، عن طريق برنامج محاكاة خاص أعد لهذا الهدف، سيتم عرض النتائج التي تم التوصل إليها في جداول خاصة بغية تسهيل عملية المقارنة.

المقدمــة :

يُعد التوزيع الأسي من التوزيعات المهمة التي تهتم بأوقات الفشل والانتظار والخدمة وتأثيرات الحياة، وأوقات فشل المكائن، وله أهمية كبيرة في تحليل الكثير من أوقات البقاء وتحديد المعولية لكثير من الأنظمة وقد توالت البحوث في هذا الموضوع حيث درس الباحث Al-Fawaze (2000), Sinha (1988) والناصر وآخرون ٢٠٠٤ وغيرهم وسوف نتناول هذا الموضوع تحقيقاً لهذا الهدف.

هدف البحث :

يهدف البحث إلى المقارنة بين طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وطريقة مقترحة تمثل خليط من طريقتين نحاول اشتقاقها وسوف تتم المقارنة باعتماد أسلوب المحاكاة حيث نكتب برامج خاصة لتوليد البيانات وتقدير المعلمة والمعولية والمقارنة بين المقدرات بواسطة MSE.

الجانب النظري :

يعتبر النموذج الأسي ذو معلمة واحدة هو الأكثر شيوعاً، وتمثل معدل أو متوسط الحياة، أو متوسط الوقت المستغرق لحين حصول الفشل وتسلك سلوك معلمة القياس بينما تمثل ($\lambda = \frac{1}{\theta}$) متوسط معدل الوصول Mean arrival rate (MAR).

إن لدالة الاحتمالية لهذا التوزيع هي

$f_T\ (t) = \theta\, e^{-\theta t}$ $\qquad t > 0$

0 $\qquad$ 0/w $\qquad$ …….(1)

وهي دالة مستمرة ولها دالة مخاطرة hazard ثابتة ودالة بقاء أسية هي

$$S(t) = p_r\ (T > t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = e^{-\theta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ودالة احتمالية تجميعية Cumulative C.D.F

$$F_T\,(t) = p_r\ (T \le t) = 1 - p_r\ (T > t)$$

$$= 1 - e^{-\theta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

كذلك يعرف متوسط الوقت المستغرق لحين الوفاة هو

$$\text{MTTD} = \int_0^{\infty} s(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\theta t}dt = \frac{1}{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ (4)$$

كذلك يتمتع هذا التوزيع بخاصية إعادة الذات Self reproducing

ويعني ذلك توزيع أصغر إحصاءه مرتبة من هذا التوزيع هو أيضاً توزيع أسي

$$f_{T_{(1)}}(t) = p_r(T_1 \le t) = 1 - p_r(T_1 > t)$$

$$p_r(T_1 > t) = p_r[T_{(1)} > t, T_{(2)} > t, \ldots T_{(n)} > t]$$

$$= [S(t)]^n$$

$$f_{T_{(1)}}(t) = 1 - [S(t)]^n$$

$$= 1 - [e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^n}] = 1 - e^{-\frac{nt}{\theta}}$$

ومنها نحصل على :

$$f_{T_{(1)}}(t) = \frac{n}{\theta} e^{-\frac{nt}{\theta}} \qquad t > 0$$

$$0 \qquad 0/w$$

وعليه يكون توزيع أصغر إحصاءه T_1 هو أيضاً توزيع أسي بالمعلمة $(\frac{n}{\theta})$.

من الخصائص الإضافية الأخرى التي يتمتع بها هذا التوزيع هي خاصية فقدان الذاكرة وهي

$$P_r(T > t + h \mid T > t) = \frac{p_r(T > t + h, T > t)}{p(T > t)}$$

$$= \frac{p_r(T > t + h)}{p(T > t)} = \frac{e^{-\theta(t+h)}}{e^{-\theta t}}$$

$$= e^{-\theta h} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..\ (6)$$

وتواصلاً مع ما ذكر، نرى من الضروري الإشارة إلى التوزيع الأسي ذو المعلمتين .Two parameter's exponential

فإذا كان وقت الفشل أو الوفاة للوحدة الواحدة لا يحصل قبل الزمن t_0، أي إن t_0 تمثل أصغر وقت، ويمثل معلمة الموقع، وهي تلك الكمية التي تؤدي إلى تحويل التوزيع بكمية مقدارها t_0.

ويعرف بالدالة التالية

$$f(t) = \theta\, e^{-\theta(t-t_0)} \qquad 0 < t_0 < t \qquad \text{........ (7)}$$

ودالة مخاطرة $\lambda(t)$ هي

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{s(t)} = \frac{\theta e^{-\theta(t-t_0)}}{e^{-\theta(t-t_0)}} = \theta \qquad \text{............ (8)}$$

وبالنسبة لهذه الدالة يكون الوقت المستغرق لحين حصول الفشل

$$MTTD = \int_{t_0}^{\infty} \varphi e^{-\theta(t-t_0)}\, dt = t_0 + \frac{1}{\theta} \qquad \text{.......... (9)}$$

وإذا أردنا تحليل أوقات الوفاة الصغيرة جداً فإن ذلك يتطلب استخدام توزيع أسي من درجات عليا hyper exponential distribution

$$f(t, k, \theta) = 2\theta^2 e^{-2k\theta t} + 2\theta(1-k)^2 e^{-2(1-k)\theta t} \qquad \text{....... (10)}$$

$$0 < k < 0.5$$

θ معدل متوسط البقاء

K معلمة شكل التوزيع

وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية (C.D.F)

$$F(t) = 1 - k\, e^{-2k\theta t} - (1-k)\, e^{-2(1-k)\theta t} \qquad \text{.......... (11)}$$

أما دالة البقاء فهي

$$S(t) = 1 - F(t)$$

$$S(t) = k\, e^{-2k\theta t} - (1-k)\, e^{-2(1-k)\theta t} \qquad \text{......... (12)}$$

وأن دالة المخاطرة لهذا التوزيع العام $\lambda(t)$ هي

$$\lambda(t) = \frac{2\theta(k^2 + (1-k)^2)e^{-2\theta t(1-2k)}}{k + (1-k)e^{-2\theta t(1-2k)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

بعد هذا المختصر عن مفهوم التوزيع الأسي ذو معلمة واحدة ومعلمتين والتوزيع الأسي العام ننتقل إلى عرض بعض طرائق تقدير معلمة ومعولية هذا التوزيع وسوف نركز على الطريقة المقترحة.

من طرائق تقدير معلمة التوزيع الأسي :

أولاً: طريقة الإمكان الأعظم (*Maximum Likelihood Method (MLE*)

في هذه الطريقة يتم الحصول على قيمة تقديرية للمعلمة θ تعمل على جعل دالة الإمكان الأعظم للدالة، أعظم ما يمكن، وإذا كانت لدينا $t_1, t_2, \ldots t_n$ مفردات عينة عشوائية n مأخوذة من مجتمع له دالة احتمالية $f(t,\theta)$، فإن دالة الإمكان $L(t,\theta)$

$$L(t,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta)$$

$$Ln\,L(t,\theta) = \sum_{i=1}^{n} L_n f(t_i,\theta)$$

وفي حالة التوزيع الأسي

$$Ln\,L(t,\theta) = -\,n\,L_n\,\theta - \frac{\sum t_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial L_n L}{\partial\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum t_i}{\theta^2}$$

وعند مساواتها مع الصفر يكون

$$\frac{-n}{\hat{\theta}} + \frac{\sum t_i}{\hat{\theta}^2} = 0$$

ومنه نجد أن

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{t} \quad \ldots\ldots\ldots.. (14)$$

وهو تقدير غير متميز وله تباين

$$v(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{\theta^2}{n}$$

ومتوسط مربعات الخطأ

$$MSE\ (\hat{\theta}_{ML}) = var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 = \frac{\theta^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \ (15)$$

بعد تقدير θ بواسطة الإمكان الأعظم يمكن اعتمادها في تقدير دالة البقاء، لأن مقدر الإمكان الأعظم يتميز بخاصية الثبات، وعليه يكون

$$\hat{s}(t) = e^{-\left(\frac{t}{\hat{\theta}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.. \ (16)$$

ثانياً: مقدر بيز *Bayes estimator* :

تعتمد هذه الطريقة على افتراض أن المعلمة المراد تقديرها متغير عشوائي يتطلب الحصول على معلومات مسبقة عنه، لكي يتم تحديد التوزيع الأولي prior distribution، ولتوضيح مقدر بيز، نفرض أن التوزيع الأولى prior distribution، ولتوضيح مقدر بيز، نفرض أن $t_1, t_2, \ldots t_n$ هي عينة عشوائية من توزيع $f(t \setminus \theta)$ وله دالة تجميعية $f(t, \theta)$ وبالنسبة للتوزيع الأسي فإن الدالة الاحتمالية المشتركة لـ T مع θ هي

$$H\ (t_1, t_2, \ldots t_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i \setminus \theta) g(\theta)$$

$$= L\ (t_1, t_2 \ldots t_n \setminus \theta) g(\theta)$$

وتكون الدالة الحدية للمتغير T هي

$$p(t_1, t_2,\ldots t_n) = \int_0^\infty H(t_1,t_2,...t_n,\theta)d\theta$$

وعليه تكون الدالة الشرطية لـ θ بوجود t هي

$$h(\theta/t_1, t_2,\ldots t_n) = \frac{H(t_1,t_2,...t_n,\theta)}{p(t_1,t_2,...t_n)}$$

وإذا افترضنا $$g(\theta) = k\frac{\sqrt{n}}{\theta}$$

وأن

$$f(t,\theta) = \theta e^{-\theta t} \qquad \theta > 0 \quad , t > 0$$

فإن

$$L(t,\theta) = \theta^n e^{-\theta\sum t_i}$$

$$\therefore H(t_1,t_2,...t_n,\theta) = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} f(t_i \backslash \theta)g(\theta)$$

$$= \theta^n e^{-\theta\sum t_i}\frac{k\sqrt{n}}{\theta}$$

$$= k\sqrt{n}\ \theta^{n-1}\ e^{-\theta\sum t_i} \qquad \ldots\ldots\ldots.. (17)$$

ومنها نجد التوزيع الحدي للمتغير العشوائي T هو

$$p(t_1, t_2,\ldots t_n) = \int_0^\infty H(t_1,t_2,...t_n,\theta)d\theta$$

$$= k\sqrt{n}\int_0^\infty \theta^{n-1}\ e^{-\theta\sum t_i}d\theta$$

$$= \frac{k\sqrt{n}}{(\sum t_i)^n}\int_0^\infty (\theta\sum t_i)^{n-1}e^{-\theta\sum t_i}d\theta(\sum t_i)$$

$$= \frac{k\sqrt{n}}{(\sum t_i)^n}\Gamma(n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

بعد ذلك نوجد الدالة الشرطية لـ θ بوجود t

$$h(\theta \mid t_1,\ldots t_n) = \frac{H(t_1, t_2 \ldots t_n, \theta)}{p(t_1, t_2 \ldots t_n)}$$

$$= \frac{k\sqrt{n}\ \theta^{n-1}\ e^{-\theta\sum t_i}}{\dfrac{k\sqrt{n}\ \lambda(n)}{(\sum t_i)^n}}$$

$$= \frac{(\sum t_i)^n}{\lambda(n)}\theta^{n-1}\ e^{-\theta\sum t_i} \qquad t > 0$$

0 0/w ………… (19)

وبإدخال دالة الخسارة التربيعية

$$L(\hat{\theta}, \theta) = c(\hat{\theta} - \theta)^2$$

ثم نوجد دالة المخاطرة $s(\hat{\theta} - \theta)$

$$S(\hat{\theta} - \theta) = E\,[c(\hat{\theta} - \theta)]$$

$$= \int_0^\infty (\hat{\theta} - \theta)^2\ h(\theta \setminus t)\, d\theta$$

$$S(\hat{\theta} - \theta) = \int_0^\infty (\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2)\ h(\theta \setminus t)\, dt$$

$$= \hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}E(\theta \setminus t) + E(\theta^2 \setminus t)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \hat{\theta}} = 2\hat{\theta} - 2E(\theta \setminus t) \Rightarrow 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

وهو المتوسط الشرطي $\hat{\theta} = E(\theta \backslash t)$

وبذلك يكون مقدر بيز للمعلمة هو :

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\sum t_i}{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (21)$$

وهو مقدر متميز وله تباين

$$v(\hat{\theta}_{Bayes}) = \frac{n\theta^2}{(n-1)^2}$$

ومتوسط مربعات خطأ يساوي

$$MSE\ (\hat{\theta}_{Bayes}) = \frac{n\theta^2}{(n-1)^2} + \frac{\theta^2}{(n-1)^2} = \frac{(n+1)\theta^2}{(n-1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

أما مقدر بيز لدالة المعولية (دالة البقاء)

$$\hat{S}(t) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\theta}}\ h(\theta / t)\ d\theta = \left(\frac{\sum t_i}{\sum t_i + t} \right)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.. (23)$$

ثالثاً: طريقة الخلط Mixture Method :

وهو مقدر مقترح ناجم عن مزج أو خلط مقدرين مثلاً خلط مقدر الإمكان الأعظم مع مقدر بيز أو مقدر الإمكان الأعظم مع مقدر العزوم، وغيرها والهدف من هذا المقدر هو الحصول على صيغة تقديرية للمعلمة تكون عندها متوسط مربعات الخطأ أقل ما يمكن، وفي بحثنا هذا يكون المقدر المقترح هو خليط من مقدري الإمكان الأعظم وبيز

$$\hat{\theta}_{mix} = p\,\hat{\theta}_{ML} + (1-p)\,\hat{\theta}_{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

ويجب استخراج قيمة p التي تجعل متوسط مربعات الخطأ أقل ما يمكن وحسب الخطوات التالية

$$\hat{\theta}_{mix} = p\,\hat{\theta}_{ML} + (1-p)\,\hat{\theta}_{B}$$

نطرح θ من الطرفين

$$\hat{\theta}_{mix} - \theta = [p\,\hat{\theta}_{ML} + (1-p)\,\hat{\theta}_{B}] - \theta$$

بعد ذلك نربع طرفي المعادلة ونأخذ التوقع

$$E\,(\hat{\theta}_{mix} - \theta)^2 = p^2 E(\hat{\theta}^2_{ML}) + 2p(1-p)\,E(\hat{\theta}_{ML})\,E(\hat{\theta}_{B})$$

$$+\ (1-p)^2\ E(\hat{\theta}_{B})^2$$

$$-\ 2p\,E(\hat{\theta}_{m})\,E(\theta) - 2(1-p)\,E(\hat{\theta}_{m})\,E(\theta) + E(\theta^2)$$

$$\frac{\partial E(\hat{\theta}_{mix} - \theta)^2}{\partial p} = 2pE(\hat{\theta}_{ML}) + (2-4p)\,E(\hat{\theta}_{ML})\,E(\hat{\theta}_{B})$$

$$-\ 2\,(1-p)\ \ E(\hat{\theta}^2_{B}) - 2E(\hat{\theta}^2_{B}) - 2E(\hat{\theta}_{m})\,E(\theta)$$

$$+\ 2E(\hat{\theta}_{m})\,E(\theta)$$

ولإيجاد p نجعل المشتقة الأولى = صفر ونعوض التوقعات

$$E(\hat{\theta}_m)=\theta \qquad E(\hat{\theta}_B)=\frac{n\theta}{n-1} \qquad , E(\theta\ )=\theta$$

$$p=\frac{\theta E(\hat{\theta}_m)-\theta E(\hat{\theta}_B)-E(\hat{\theta}_m)\,E(\hat{\theta}_B)+E(\hat{\theta}^2_B)}{E(\hat{\theta}_m)^2-2E(\hat{\theta}_m)\,E(\hat{\theta}_B)+E(\hat{\theta}^2_B)}$$

وبعد تعويض التوقعات أعلاه تكون

$$P=\frac{\theta^2-\left(\frac{2n}{n-1}\right)\theta^2+\frac{(n+1)}{(n-1)^2}\theta^2}{\frac{\theta^2}{n}-\left(\frac{2n}{n-1}\right)\theta^2+\frac{(n+1)}{(n-1)^2}\theta^2}$$

وتختصر قيمة p إلى

$$P=\frac{2n+n^2-n^3}{4n^2-n+1-2n^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

n هو حجم العينة اللازم لمقدر $\hat{\theta}_{mix}$

نتيجة لذلك يكون مقدر دالة المعولية

$$\hat{S}(t_{mix})=e^{-\left(\frac{t}{\hat{\theta}_{mix}}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

الجانب التجريبي المحاكاة :

تعرف المحاكاة بأنها عملية تصميم وإعداد أنموذج رياضي يحاكي النظام الحقيقي للبيانات، ويتابع تأثير ذلك النظام، من أجل معالجة لمشكلات كثيرة منها العلاقات الرياضية والمنطقية الضرورية لوصف سلوك وكيان عالم حقيقي، وقد اعتمدت المحاكاة بشكل واسع في المجالات الإحصائية من خلال البحث عن طرائق لتطوير المقدرات والمقارنة بينها، وإيجاد

التوزيعات الاحتمالية لمختلف إحصاءات العينة، وفي بحثنا هذا سيتم إعداد برنامج خاص بلغة Visual Basic، بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ.

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_i - \theta)^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

$$MSE\ (\hat{S}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{S}_i - S)^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

R هو مكررات لكل تجربة وهنا R = 500

واختيرت ثلاث حجوم لقيم العينة هي

n = 10, 30, 50

وأربعة قيم افتراضية للمعلمة θ

θ = 0.4 0.6, 1.3, 2.5

والجداول التالية تعطي تقدير معلمة ودالة التوزيع الأسي للطرائق الثلاث، وكذلك تقدير معولية التوزيع الأسي أيضاً للطرائق الثلاث لمجموعات مختلفة من θ وحجوم عينات n = 10, 30, 50 وكررت التجربة R = 500

ثم حسبت قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي ولكافة الطرائق وأحجام العينات لكل من θ = 0.4, 0.6, 1.3, 2.5 و R = 500, n = 10, 30, 50.

والنتائج جميعها معروضة في الجداول وواضح من الجداول أن قيم MSE لتقدير المعولية في كافة الطرائق وباعتماد التقدير المختلط (المقترح) هي أصغر منها لمقدري الإمكان الأعظم وبيز مما يدل ذلك على كفاءة المقدر المقترح ونلاحظ أيضاً أنه كلما تزداد θ يقل MSE لدالة المعولية للمقدر المقترح مقارنة بالمقدرين الآخرين كما هو واضح في الجدول (٩) و(١٠).

جدول (١)

قيم تقدير معلمة التوزيع الأسي لكافة الطرائق

ولكافة أحجام العينات لتجربة عدد مكرراتها

R = 500

θ	n	MLE	BAYES	MIXTURE
0.4	10	0.392609	0.436232	0.412374
	30	0.401709	0.415561	0.408408
	50	0.402251	0.41046	0.406274
0.6	10	0.588913	0.654348	0.618561
	30	0.602563	0.623341	0.612612
	50	0.603377	0.61569	0.609412
1.3	10	1.27598	1.417755	1.340215
	30	1.305554	1.350573	1.327327
	50	1.307316	1.333996	1.320392
2.5	10	2.453808	2.726453	2.577337
	30	2.510682	2.597257	2.552552
	50	2.514071	2.565378	2.539217

جدول (٢)

قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير التوزيع الأسي لكافة الطرائق

ولكافة أحجام العينات لتجربة عدد مكرراتها

R = 500

θ	n	MLE	BAYES	MIXTURE
0.4	10	0.013675	0.018129	0.01518
	30	0.005502	0.006128	0.005755
	50	0.003325	0.003566	0.003426
0.6	10	0.03077	0.04079	0.034156
	30	0.012381	0.013788	0.01295
	50	0.007482	0.008024	0.007709
1.3	10	0.144452	0.19149	0.160343
	30	0.058125	0.064727	0.060795
	50	0.035124	0.037672	0.036191
2.5	10	0.534218	0.708176	0.592986
	30	0.21496	0.239377	0.224833
	50	0.129896	0.139321	0.133844

جدول (٣)

قيم تقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي لكافة الطرائق

ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 0.4$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	Real	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.7788	0.75908	0.76211	0.76904
	0.2	0.60653	0.58062	0.58926	0.59555
	0.3	0.47237	0.44713	0.46122	0.46407
	0.4	0.36788	0.34642	0.36485	0.28637
	0.5	0.2865	0.26987	0.29132	0.28637
	0.6	0.22313	0.21129	0.23456	0.22658
	0.7	0.17377	0.1662	0.09029	0.18005
	0.8	0.13534	0.13129	0.15543	0.14364
	0.9	0.1054	0.10413	0.12775	0.11502
30	0.1	0.7788	0.7738	0.7746	0.777
	0.2	0.6065	0.6001	0.6028	0.6051
	0.3	0.4724	0.4665	0.471	0.4723
	0.4	0.3679	0.3634	0.3695	0.3694
	0.5	0.2865	0.2836	0.291	0.2894
	0.6	0.2231	0.2219	0.23	0.2273
	0.7	0.1738	0.1739	0.1824	0.1788
	0.8	0.1353	0.1365	0.1452	0.1409
	0.9	0.1054	0.1074	0.119	0.1113
50	0.1	0.7788	0.77631	0.776814	0.778253
	0.2	0.60653	0.603506	0.605052	0.606515
	0.3	0.472366	0.469807	0.472481	0.473306
	0.4	0.367879	0.36621	0.369872	0.369832
	0.5	0.286504	0.285823	0.29024	0.289343
	0.6	0.22313	0.22336	0.228281	0.226649
	0.7	0.173773	0.17476	0.179953	0.177751
	0.8	0.135335	0.136896	0.142165	0.139565
	0.9	0.105399	0.107361	0.11255	0.109707

جدول (4)

قيم تقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي لكافة الطرائق

ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 0.6$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	Real	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.846481	0.831382	0.832898	0.838703
	0.2	0.716531	0.693653	0.698457	0.705699
	0.3	0.60653	0.580624	0.589261	0.595552
	0.4	0.513417	0.48747	0.499841	0.503978
	0.5	0.434598	0.410402	0.426082	0.427577
	0.6	0.367879	0.346417	0.364847	0.363627
	0.7	0.311403	0.293121	0.313711	0.309938
	0.8	0.263597	0.248595	0.27078	0.264737
	0.9	0.22313	0.21129	0.234561	0.226582
30	0.1	0.846481	0.842622	0.843045	0.844985
	0.2	0.716531	0.71075	0.712153	0.714718
	0.3	0.60653	0.600124	0.60275	0.605127
	0.4	0.513417	0.507218	0.511108	0.512831
	0.5	0.434598	0.429109	0.434184	0.43502
	0.6	0.367879	0.363372	0.369484	0.369353
	0.7	0.311403	0.30799	0.314958	0.313879
	0.8	0.263597	0.261285	0.268921	0.266972
	0.9	0.22313	0.22186	0.229979	0.22727
50	0.1	0.846481	0.844541	0.844786	0.845953
	0.2	0.716531	0.713702	0.714522	0.716081
	0.3	0.60653	0.603506	0.605052	0.606515
	0.4	0.513417	0.510633	0.512939	0.514018
	0.5	0.434598	0.432308	0.435334	0.435881
	0.6	0.367879	0.36621	0.369872	0.369832
	0.7	0.311403	0.310394	0.314588	0.313967
	0.8	0.263597	0.263233	0.267846	0.266687
	0.9	0.22313	0.22336	0.228281	0.226649

جدول (5)

قيم تقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي لكافة الطرائق

ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 1.3$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	Real	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.925961	0.917876	0.918244	0.921636
	0.2	0.857403	0.843166	0.844482	0.850028
	0.3	0.793922	0.775127	0.777781	0.784525
	0.4	0.735141	0.713097	0.717337	0.724552
	0.5	0.680712	0.656491	0.662455	0.669592
	0.6	0.630313	0.604786	0.612531	0.619181
	0.7	0.583645	0.557515	0.567039	0.572907
	0.8	0.540432	0.514261	0.525518	0.530396
	0.9	0.500419	0.47465	0.487562	0.491312
30	0.1	0.925961	0.923889	0.923989	0.925088
	0.2	0.857403	0.853763	0.854128	0.855974
	0.3	0.793922	0.789134	0.789888	0.792193
	0.4	0.735141	0.729558	0.730788	0.73332
	0.5	0.680712	0.674625	0.67639	0.678965
	0.6	0.630313	0.623963	0.626296	0.628769
	0.7	0.583645	0.577227	0.580146	0.582404
	0.8	0.540432	0.534103	0.537609	0.539567
	0.9	0.500419	0.494304	0.498384	0.499981
50	0.1	0.925961	0.924907	0.924964	0.925622
	0.2	0.857403	0.85557	0.855782	0.85689
	0.3	0.793922	0.791538	0.791977	0.793368
	0.4	0.735141	0.732396	0.733114	0.734651
	0.5	0.680712	0.677763	0.678697	0.680367
	0.6	0.630313	0.627287	0.628659	0.630176
	0.7	0.583645	0.580645	0.582367	0.583761
	0.8	0.540432	0.537531	0.539614	0.540833
	0.9	0.500419	0.497699	0.50012	0.501124

جدول (6)

قيم تقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي لكافة الطرائق

ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 2.5$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	Real	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.960689	0.956321	0.956426	0.958365
	0.2	0.923116	0.91475	0.915146	0.918647
	0.3	0.88692	0.865175	0.876015	0.880747
	0.4	0.852143	0.837487	0.838898	0.844571
	0.5	0.81873	0.801586	0.803668	0.810032
	0.6	0.786627	0.767378	0.770212	0.777047
	0.7	0.755783	0.734774	0.738422	0.745539
	0.8	0.726149	0.70369	0.708199	0.715434
	0.9	0.697676	0.674048	0.679451	0.686663
30	0.1	0.960789	0.959644	0.959672	0.960292
	0.2	0.923116	0.920973	0.92108	0.922215
	0.3	0.88692	0.883913	0.884144	0.885701
	0.4	0.852143	0.848397	0.848789	0.850681
	0.5	0.81873	0.814356	0.814941	0.817094
	0.6	0.786627	0.781727	0.782534	0.784877
	0.7	0.755783	0.75045	0.7515	0.753974
	0.8	0.726149	0.720467	0.721779	0.72433
	0.9	0.697676	0.691722	0.69331	0.69589
50	0.1	0.960789	0.960204	0.96022	0.96059
	0.2	0.923116	0.922026	0.922088	0.922767
	0.3	0.88692	0.885399	0.885532	0.886465
	0.4	0.852143	0.850258	0.850485	0.851622
	0.5	0.81873	0.816542	0.816882	0.818178
	0.6	0.786627	0.784191	0.78466	0.786076
	0.7	0.755783	0.753149	0.753761	0.755259
	0.8	0.726149	0.723361	0.724128	0.725677
	0.9	0.697676	0.694777	0.695707	0.697277

جدول (٧)

قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي

لكافة الطرائق ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 0.4$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.0048	0.0045	0.0042
	0.2	0.01	0.0089	0.0091
	0.3	0.012	0.0105	0.0113
	0.4	0.0117	0.0104	0.0114
	0.5	0.0103	0.0094	0.0104
	0.6	0.0086	0.0082	0.0089
	0.7	0.0069	0.007	0.0074
	0.8	0.0054	0.0058	0.0059
	0.9	0.0041	0.0049	0.0047
30	0.1	0.0014	0.0014	0.0014
	0.2	0.0033	0.0032	0.0032
	0.3	0.0043	0.0041	0.0042
	0.4	0.0045	0.0043	0.0045
	0.5	0.0042	0.0041	0.0042
	0.6	0.0036	0.0036	0.0037
	0.7	0.003	0.003	0.0031
	0.8	0.0024	0.0025	0.0025
	0.9	0.0018	0.002	0.0019
50	0.1	0.000855	0.000845	0.000837
	0.2	0.001999	0.001962	0.001971
	0.3	0.002648	0.002592	0.002631
	0.4	0.002789	0.002737	0.002792
	0.5	0.002599	0.002567	0.002621
	0.6	0.002244	0.002241	0.00228
	0.7	0.001842	0.001866	0.001884

	0.8	0.001457	0.001503	0.001502
	0.9	0.001123	0.001183	0.001165

جدول (٨)

قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي

لكافة الطرائق ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 0.6$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.002684	0.002547	0.002336
	0.2	0.006838	0.006249	0.006084
	0.3	0.009964	0.008882	0.009065
	0.4	0.01164	0.010238	0.010831
	0.5	0.012108	0.010623	0.011524
	0.6	0.011743	0.010382	0.011433
	0.7	0.010881	0.009785	0.010835
	0.8	0.009771	0.009015	0.009951
	0.9	0.008581	0.008184	0.008934
30	0.1	0.000752	0.000741	0.000719
	0.2	0.002085	0.002031	0.002011
	0.3	0.003264	0.003156	0.003175
	0.4	0.004053	0.003903	0.003976
	0.5	0.004442	0.004275	0.004393
	0.6	0.004502	0.004345	0.004489
	0.7	0.004329	0.004203	0.004352
	0.8	0.004009	0.003927	0.004062
	0.9	0.00361	0.003577	0.003687
50	0.1	0.000455	0.000451	0.000444
	0.2	0.00127	0.001251	0.001246
	0.3	0.001999	0.001962	0.001971
	0.4	0.002494	0.002443	0.002472
	0.5	0.002744	0.002687	0.002733

	0.6	0.002789	0.002737	0.002792
	0.7	0.002688	0.002648	0.002704
	0.8	0.002492	0.002469	0.002519
	0.9	0.002244	0.002241	0.00228

جدول (٩)

قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي

لكافة الطرائق ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 1.3$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.000735	0.000716	0.000632
	0.2	0.00237	0.002257	0.002059
	0.3	0.004317	0.004031	0.003789
	0.4	0.006238	0.005729	0.005532
	0.5	0.007951	0.007202	0.007123
	0.6	0.009372	0.008394	0.008483
	0.7	0.010476	0.0093	0.009581
	0.8	0.01127	0.009941	0.010414
	0.9	0.011782	0.010352	0.011001
30	0.1	0.000195	0.000194	0.000186
	0.2	0.000659	0.00065	0.00063
	0.3	0.001251	0.001227	0.001201
	0.4	0.001879	0.001833	0.001811
	0.5	0.002481	0.002411	0.0024
	0.6	0.003023	0.001927	0.002935
	0.7	0.003483	0.003364	0.003395
	0.8	0.003855	0.003716	0.003772
	0.9	0.004138	0.003983	0.004064
50	0.1	0.000117	0.000117	0.000114
	0.2	0.000399	0.000395	0.000389
	0.3	0.000759	0.000751	0.000743

	0.4	0.001143	0.001128	0.001121
	0.5	0.001514	0.00149	0.001488
	0.6	0.001849	0.001816	0.001821
	0.7	0.002136	0.002095	0.002109
	0.8	0.002369	0.002321	0.002344
	0.9	0.002548	0.002495	0.002527

جدول (10)

قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للتوزيع الأسي

لكافة الطرائق ولكافة أحجام العينات عندما $\theta = 2.5$ لتجربة عدد مكرراتها R = 500

n	t_i	MLE	BAYES	MIXTURE
10	0.1	0.00022	0.000217	0.000188
	0.2	0.000788	0.000767	0.000678
	0.3	0.001584	0.001523	0.00137
	0.4	0.00252	0.002396	0.002191
	0.5	0.003527	0.003318	0.003083
	0.6	0.004554	0.004243	0.004002
	0.7	0.005564	0.005138	0.004915
	0.8	0.006529	0.005982	0.005799
	0.9	0.007432	0.00676	0.006637
30	0.1	0.000057	0.000057	0.000054
	0.2	0.00021	0.000208	0.0002
	0.3	0.000432	0.000427	0.000412
	0.4	0.000703	0.000693	0.000673
	0.5	0.001006	0.000989	0.000964
	0.6	0.001326	0.0013	0.001274
	0.7	0.001653	0.001616	0.001591
	0.8	0.001978	0.001929	0.001907
	0.9	0.002294	0.002231	0.002216
50	0.1	0.000034	0.000034	0.0000333
	0.2	0.000126	0.000126	0.000123
	0.3	0.000261	0.000259	0.000254
	0.4	0.000425	0.000422	0.000415
	0.5	0.00061	0.000604	0.000596
	0.6	0.000805	0.000796	0.000788
	0.7	0.001005	0.000992	0.000985
	0.8	0.001204	0.001187	0.001181
	0.9	0.001398	0.001377	0.001373

الاستنتاجات :

بعد تنفيذ تجربة المحاكاة لمقارنة ثلاث من طرق تقدير معلمة ودالة المعولية للتوزيع الأسي تم التوصل إلى الاستنتاجات الآتية:-

١. أعطى المقدر المقترح أقل MSE لدالة المعولية للتوزيع الأسي مقارنة بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وخاصة عندما كانت ($\theta = 1.3, 2.5$).

٢. أيضاً كانت قيم متوسطات مربعات الخطأ الكامل IMSE لتقدير المعولية لمقدر الخليط أقل من طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز كما هو واضح في الجدول (10).

التوصيات :

نتيجة إلى توصلنا إليه من نتائج في الجداول المرفقة، والمقدرات التي تم الحصول عليها

١- نوصي باستخدام الطريقة المقترحة أي طريقة الخليط لأنها حققت أقل MSE.

٢- نوصي باستخدام أفضل مقدر للمعلمة لان ذلك يعطي أفضل مقدر للمعولية لأنها دالة من هذا المقدر.

٣- نوصي بالمقارنة من خلال متوسط مربعات الخطا التكاملي وهو عبارة عن تكامل المساحة الكلية واختزالها بقيمة واحدة معبرة عن الزمن الكلي.

المصـــادر

1. Barlow R. E. and Prochan F. mathematical theory of reliability wiley 1990.
2. Chiou, P, “Empirical bayes estimation of reliability in the exponential distribution”. Comm. Statistic, Vol 22, 1993.
3. Pugh E. L. “The best estimation of reliability in the exponential case. Operation research, Vol 11, 1993.
4. Law, A. and W. D. Kelton “Simulation modeling and analysis” 3rd 2002.

٥. حسين ، اسيل ناصر "محاكاة أفضل مقدر لمعلمة ومعولية توزيع ويبل ذي المعلمتين"، مقبول للنشر في مجلة كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة بغداد، ٢٠٠٨.

٦. صالح, مكي اكرم محمد (٢٠٠٦) " محاكاة طرائق تقدير المعولية" أطروحة دكتوراه قسم الرياضيات/ كلية التربية/ الجامعة المستنصرية.

٧. النائب, بلسم شفي (٢٠٠٣) " تقدير دالة المعولية لتوزيع اللوغاريتم الطبيعي مع تطبيق عملي" رسالة ماجستير كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة بغداد.

Abstract

One of the most useful and widely used distribution. Is the exponential distribution which is used in life experiments and life testing. The aim of this research is to estimate and compare between methods of estimating the parameter and reliability function of exponential distribution. The comparsion between Bayes method and maximum likelihood and proposed estimator is done using simulation with different sample sizes. The comparsion is executed through mean square error, on the results obtained are explained in tables.